Lösung 3.11 Zeitgleichung und Analemmas auf anderen Planeten

Wir wollen zunächst eine sehr einfache Berechnung zeigen, die die Form der Analemmas richtig wider gibt, allerdings keine zeitliche Entwicklung zeigt, da die Keplergleichung nicht gelöst wird. Man startet dazu mit der exzentrischen Anomalie E und betrachtet ein ganzes planetarisches Jahr, von dem man weiß, dass $E = 0 \ldots 360°$ ist. Mit Formel (3.46)

$$\tan\left(\frac{\upsilon_{\mathrm{P}}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e_{\mathrm{P}}}{1-e_{\mathrm{P}}}}\,\tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

berechnet man die wahre Anomalie $\upsilon_{\mathrm{P}}(E)$ des Planeten P. Aus dieser bestimmt man über (3.66) und (3.73) die Längen der wahren und mittleren Sonne

$$L_{\mathrm{P},\odot} = \upsilon_{\mathrm{P}} + L_{\mathrm{P,Per}} \ , \ L_{\mathrm{P,M}} = M_{\mathrm{P}} + L_{\mathrm{P,Per}} \ .$$

Dazu braucht man die planetozentrische Länge des Perihels. Das ist der Winkelabstand des Perihels vom planetaren Frühlingspunkt, der sich wiederum als Schnittpunkt der Äquatorebene des Planeten mit der Bahnebene des Planeten ergibt. Wir betrachten dazu Abb. 28.58). Diese entspricht der Abb. 3.24, die wir in Kapitel 3.5.2.4 für die Erde benutzt haben. Wie dort dargestellt, geht es auch hier um die Anwendung von Gleichung (3.81). Hier müssen wir nun anstelle der ekliptikalen Länge $\lambda_\odot$ und der geozentrischen Rektaszension $\alpha_\odot$ die planetozentrische Länge $L_{\mathrm{P},\odot}$ und die planetozentrische Rektaszension $\alpha_{\mathrm{P},\odot}$ verwenden. Mit dem Begriff *planetare* oder *planetozentrische* Rektaszension ist analog zur „normalen“ *geozentrischen* Rektaszension ein Winkel gemeint, der entlang des planetaren Äquators vom *planetaren*(!) Frühlingspunkt zum Fusspunkt der wahren Sonne aus gemessen wird.

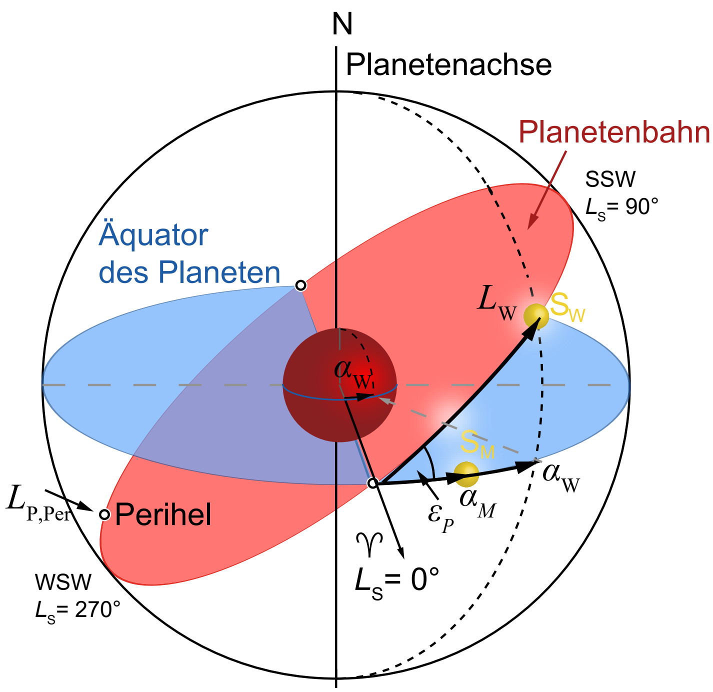

Abb. 28.58: Ableitung der planetaren Sonnenkoordinaten

Die (planetare) Rektaszension ergibt sich aus der entsprechenden Umrechnungsformel vom planeto-ekliptikalen System in das planeto-äquatoriale KOS (Tab. 3.1):

$$\tan \alpha_{\mathrm{P},\odot} = \cos \varepsilon_{\mathrm{P}} \cdot \tan L_{\mathrm{P},\odot} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{\mathrm{P,M}} = L_{\mathrm{P,M}} \ ,$$

worin ε_{P} die Polneigung des jeweiligen Planeten relativ zu seiner Bahn ist. Damit ergibt sich der Stundenwinkel nach (3.81) zu $\tau = \alpha_{\mathrm{M}} - \alpha_{\odot}$. Die Deklination der wahren Sonne berechnet sich ebenfalls aus Tabelle 3.1 zu:

$$\sin \delta_{\odot} = \sin \varepsilon_{\mathrm{P}} \cdot \sin L_{\mathrm{P},\odot} \ ,$$

womit wir alle Berechnungsdaten für die Analemmas der Planeten haben. Details der Berechnung sind im MATLAB Skript 3.39 (Analemma03.m) zu finden. Das Ergebnis der Berechnung lässt sich zusammenfassen, wobei wir den Index P für den Planeten weglassen, aber noch einmal darauf hinweisen, dass hier die L_{Per} nicht den in Tabelle 3.27 gelisteten heliozentrisch-ekliptikalen Längen des Perihels entsprechen, sondern den planetozentrischen $L_{\mathrm{P,Per}}$.

$$\tau_{\mathrm{ZGL}}(E) = M + L_{\mathrm{Per}} - \arctan\left\{\cos\varepsilon\ \tan\left[L_{\mathrm{Per}} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\right)\right]\right\}\ ,$$
$$\delta(E) = \arcsin\left\{\sin\varepsilon\sin\left[L_{\mathrm{Per}} + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)\right)\right]\right\}$$

Die entsprechenden Rechnungen haben wir im MATLAB Skript Uebung11_Basic.m durchgeführt und sind in Abb. 28.59 gezeigt. Wir geben die planetozentrischen Längen des Perihels ebenfalls im MATLAB Skript an. Wir sehen im Ergebnsi, dass nur auf einigen Planeten das Analemma als die von der Erde bekannten Figur der „Acht" erscheint, auf anderen Planeten kommt es wegen des unterschiedlichen Zusammenspiels der Parameter Achsneigung und Exzentrizität zu anderen Bildern. Wenn einer der Bahnparameter dominiert, wie z.B. die Exzentrizität beim Mars, dann ähnelt das Analemma eher einer Träne (siehe Abb. 28.59), wenn hingegen die Achsneigung sehr klein ist, wie beim Jupiter (nur 3°) wird die Figur ähnlich einer Ellipse. Man beachte daher die ausgeprägte Form und Breite bei Planetenbahnen mit großer Exzentrizität (Merkur, Mars, Saturn), die verschwindende Form der „Acht" bei geringer Polneigung (Merkur, Venus, Jupiter) bzw. das Überwiegen der Exzentrizität über die Polneigung (Mars, Saturn).

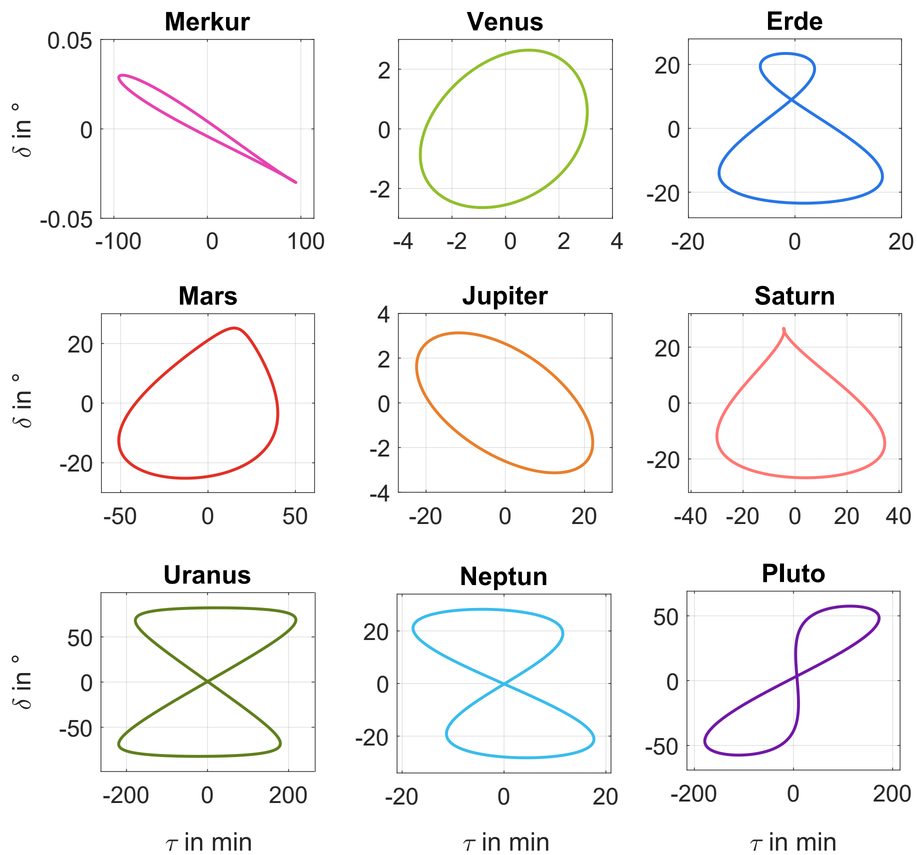

Abb. 28.59: Analemma für die Planeten Merkur bis Pluto

Wir wollen uns nun auch der Zeitgleichung zuwenden und müssen dazu die Lösung der Keplergleichung für den jeweiligen Planeten berücksichtigen. Wir skizzieren dazu zwei alternative Methoden.

Methode 1 (nach Allison[23])
Die Rotation des Planeten muss man zunächst nicht berücksichtigen. Man muss aber wiederum die Lage der Planetenbahn relativ zum planetaren Äquator kennen oder m.a.W. die Richtung der Planetenrotationsachse relativ zu seiner Bahnebene. Wir verweisen wieder auf die Abb. 28.58, dann besteht die Aufgabe in Folgendem:

[23] Die Rechnungen erfolgen analog den Betrachtungen in Kapitel 3.5.2.1 und sind in den MATLAB-Skripten zur Übung im Detail beschrieben. Wir verweisen ferner auf die Darstellungen in [35] und [36], in denen die Rechnungen ausführlich für den Mars hergeleitet wurden. Wir haben in der Übung das Vorgehen für alle Planeten verallgemeinert.

1. Es müssen die Keplerschen Elemente der Planetenbahn (bzw. der vom Planeten aus gesehenen Sonnenbahn) relativ zum planetaren Äquator und Frühlingspunkt ausgedrückt werden. Bekannt sind dabei ja zunächst nur die Bahnelemente bezogen auf die (Erd-)Ekliptik und den Erdfrühlingspunkt. Halbachse und Exzentrizität ändern sich nicht, ebenso bleibt die mittlere Anomalie unverändert. Die anderen Bahnelemente müssen jedoch transformiert werden.
2. Mit der Inklination i, der Länge des Knotens Ω, dem Argument des Perihels ω und der Richtung der Rotationsachse des Planeten (deren Richtungswerte[24] α_0, δ_0 man aus der Literatur entnimmt) muss man nun die Lage des planetaren Frühlingspunktes (PFP) auf dem planetaren Äquator berechnen (siehe Abb. 28.60) und daraus den Winkel $L_{\mathrm{P,Per}}$ zwischen planetarem Frühlingspunkt und Perihelion der Planetenbahn.
3. Am einfachsten geht das mittels Rotationsmatritzen für die kartesischen Vektoren normal zu den einzelnen Ebenen und entlang der jeweiligen Knotenlinien.
4. Mit diesen Größen kann dann die planetare Zeitgleichung, die der ekliptikalen ZGL nach (3.81) bzw. (3.82) entspricht, berechnet werden:

$$\tau_{\mathrm{ZGL,\,P}} = (L_{\mathrm{P},\odot} - \alpha_{\mathrm{P},\odot}) + C$$

5. Mit der Deklination $\delta_{\mathrm{P},\odot}$, die wir aus der planetozentrischen Länge der Sonne und der Achsneigung analog (3.74) berechnen, erstellen wir dann das Analemma.

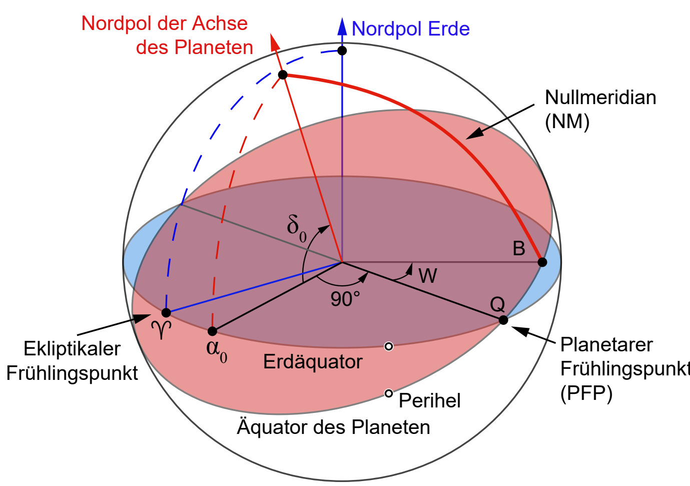

Abb. 28.60: Planetarer Frühlingspunkt (PFP) und Nullmeridian (NM)

---

[24] Mit Richtung der Rotationsachse meinen wir die geozentrische Rektaszension und Deklination des Punktes an der Himmelskugel auf den die Rotationsachse zeigt.

Die entsprechenden Rechnungen haben wir im MATLAB Skript Uebung11_V1.m durchgeführt. Die Ergebnisse der Zeitgleichungsrechnung sind in 28.61 dargestellt, die Analemmas stimmen erwartungsgemäß mit denen von 28.59 überein. Wir wollen hier nochmals auf die Besonderheit des Uranus verweisen. Der Uranus braucht etwa 84 Jahre, bis er die Sonne einmal umrundet hat. Dabei dauert ein Tag auf dem Uranus nur 17 Stunden und 14 Minuten. Da seine Polachse fast in der Bahnebene liegt rollt er quasi auf seiner Bahnebene um die Sonne, wobei für fast ein halbes Jahr der Nordpol, das andere Halbjahr der Südpol zur Sonne zeigt. Die ZGL und damit Jahreszeiten sind aus diesem Grund ziemlich „verrückt". Es bleibt auf dem Uranus im Sommer 42 Erden-Jahre lang ständig hell und wird dann abrupt dunkel. Das Analemma zeigt das sehr schön.

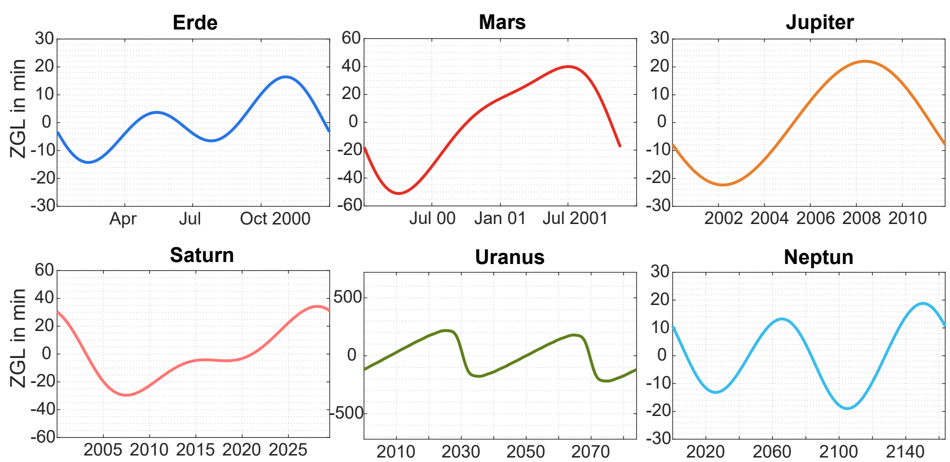

Abb. 28.61: Zeitgleichung für einige Planeten

Methode 2 (nach Montenbruck[25])
Auch hier wollen wir die Methodik kurz skizzieren. Man berechnet (numerisch) für einen Punkt auf der Oberfläche des Planeten (gegeben durch die planetographischen Koordinaten φ_P und λ_P) die planetare Rektaszension und Deklination der Sonne im planetozentrischem Äquatorialsystem für den Verlauf eines tropischen Jahres. Aus diesen Koordinaten lassen sich dann völlig analog zur Erde bei Festlegung einer geeigneten Planeten-Nullzeit (z.B. Nullmeridian NM in Abb. 28.60) die Aufgänge und Untergänge der Sonne und natürlich auch den Meridiandurchgang für jeden Ort φ_P, λ_P des Planeten bestimmen. Zusammengefasst ist das Vorgehen also wie folgt:

1. Ausgehend von der heliozentrischen Position des Planeten berechnet man die planetozentrischen Koordinaten $\alpha_{P,\odot}$ und $\delta_{P,\odot}$ der wahren Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres.

[25] Mit der Methode ist dann auch die Position jedes anderen Himmelskörpers im KOS des Planeten berechenbar. Für Details verweisen wir auf [37, 38].

2. Die mittlere Sonne berechnen wir über die mittlere Anomalie. Alternativ könnten wir auch aus der Kenntnis der Rotationsperiode des Planeten eine Planetensternzeit θ_P berechnen, wobei sich die Zeitgleichung dann entweder über (3.81) bzw. $\tau_{ZGL} = \theta_P - \alpha_{P,\odot}$ berechnet.
3. Mit der Deklination $\delta_{P,\odot}$ aus der planetozentrischen Breite der wahren Sonne erstellen wir dann das Analemma.

Die entsprechenden Rechnungen haben wir im MATLAB Skript Uebung11_All_V2.m bzw. für alle Planeten hinterlegt. Auch hier stimmen die Analemmas erwartungsgemäß mit denen von Abb. 28.59 und die Zeitgleichungen mit denen von Abb. 28.61 überein.

Eine schöne Erweiterung der Methodik ist die ANwendung auf die Berechnung eines Analemma des Mondes von der Erde aus betrachtet bzw. eines Analemma der Sonne vom M ond aus betrachtet. Im MATLAB MATLAB Skript Annalemma04.m haben wir die Rechnungen dazu detailliert hinterlegt.

→ zur **Übung 3.11**.