Analemmas auf anderen Planeten

Beobachtet man die Sonne täglich zur gleichen Zeit sowie an einem festen Standort und zeichnet die im Lauf eines Jahres gemessenen Positionen auf, dann ergibt sich eine Kurve am Himmel, deren Form einer Acht ähnelt – ein so genanntes Analemma. Wie würde diese Bahnkurve hypothetischen Beobachtern auf anderen Himmelskörpern des Sonnensystems erscheinen? Wir stellen eine Methode zur Berechnung vor.

Von Kenneth von Bünau und Michael Kaschke

Zwischen dem 16. Juli 2006 und dem 2. Juni 2008 nahm der Marsrover Opportunity etwa an jedem dritten Marstag während eines Marsjahres zur jeweils gleichen mittleren Ortszeit ein Foto des Tageshimmels auf dem Roten Planeten auf. Diese Fotos wurden zu einem spektakulären Bild zusammengefügt – wahrscheinlich das erste seiner Art, das auf einem anderen Planeten gemacht wurde (siehe »Auf Erde und Mars«). Die Form der scheinbaren Bahn der Sonne, die sich bei solchen Beobachtungen ergibt, ist seit dem Altertum bekannt und wird als Analemma bezeichnet. Das Wort stammt aus dem Griechischen und bedeutet im astronomischen Bezug etwa »Stütze einer Sonnenuhr«, denn das Analemma spielt bei der Zeitmessung und Konstruktion von Sonnenuhren eine große Rolle (siehe »Analemma auf einer alten Sonnenuhr«, S. 62).

Die Beobachtung und Berechnung des von der Erde aus sichtbaren Analemmas der Sonne wurden in dieser Zeitschrift bereits ausführlich beschrieben (siehe SuW 3/2013, S. 80). Wir wollen uns im Folgenden mit dem Aspekt der Zeitdefinition und Zeitmessung beschäftigen, um zu verstehen, warum das vom Marsrover Opportunity aufgenommene Analemma sich so deutlich vom bekannten irdischen Analemma unterscheidet. Mit diesem Wissen wollen wir anschließend Analemmas berechnen, wie sie von anderen Himmelskörpern unseres Sonnensystems aus erscheinen würden.

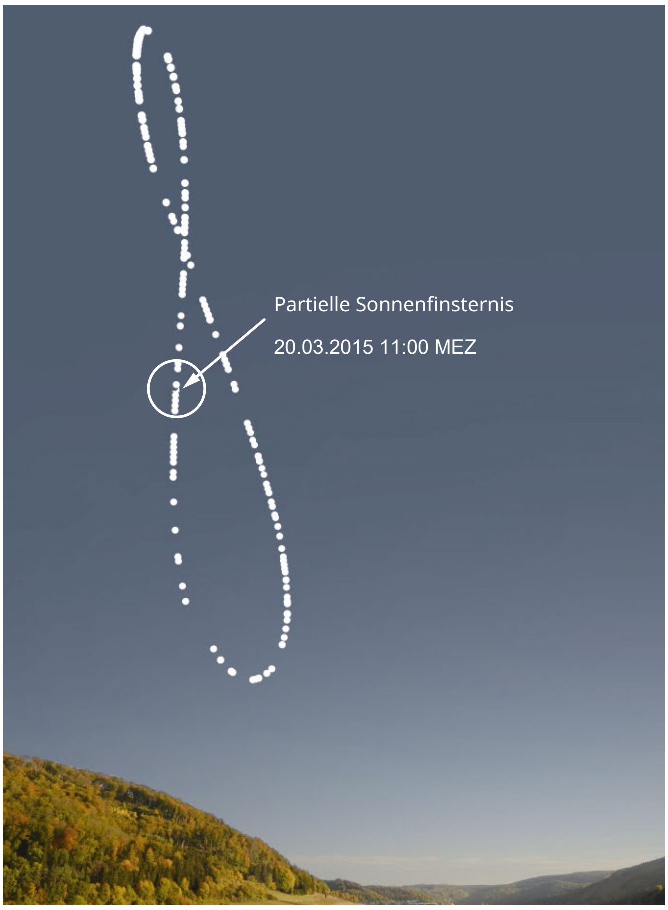
Wahre und mittlere Sonnenzeit

Zur Zeitmessung benötigt man ein periodisch wiederkehrendes Ereignis. Auf der Erde wurde dazu seit dem Altertum der tägliche Höchststand der Sonne, die Kulmination, benutzt. Hieraus ergibt sich die wahre Sonnenzeit, die von der geografischen Länge des Beobachtungsorts abhängt und deshalb als wahre Ortszeit (WOZ) bezeichnet wird (siehe SuW 6/2015, S. 66). Schon frühzeitig stellten aufmerksame Himmelsbeobachter fest, dass bei dieser Zeitdefinition die Tageslänge – also der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen – im Jahreslauf schwankt. Ursachen sind die ungleichmäßige Bewegung der Erde um die Sonne und die Neigung der Erdachse relativ zur Bahnebene des Planeten.

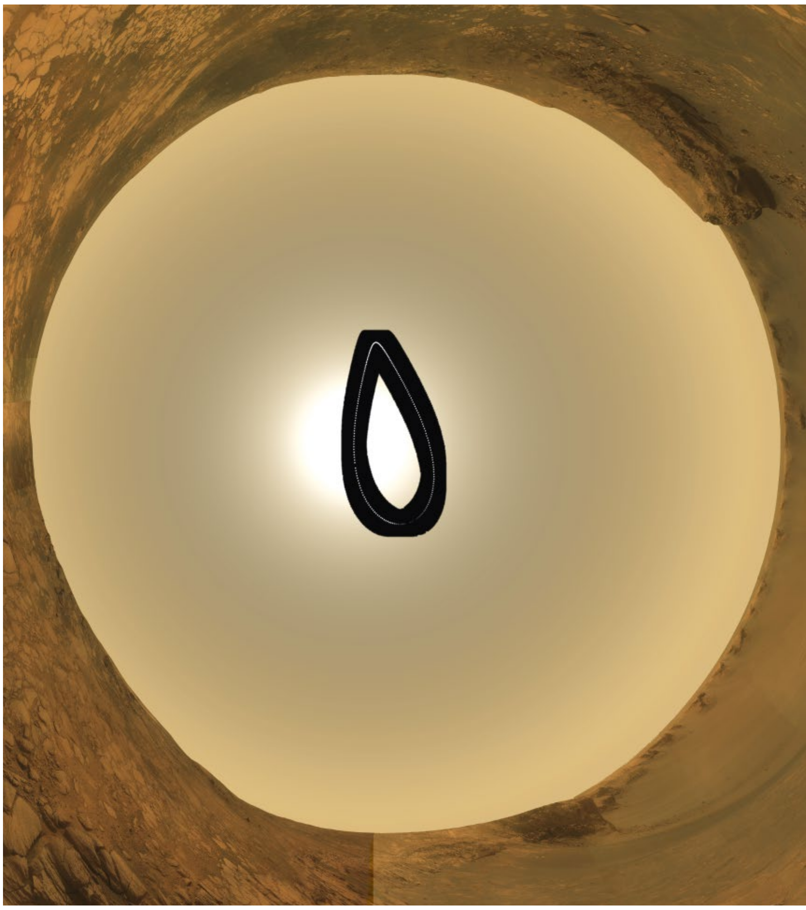
Auf Grund dieser Schwankungen ist die so definierte Zeit als allgemein in der Praxis handhabbare Zeit untauglich. Besser eignet sich die mittlere Sonnenzeit beziehungsweise die mittlere Ortszeit (MOZ), die sich aus der Kulmination einer fiktiven mittleren Sonne ableiten lässt und die Grundlage der so genannten Weltzeit (Universal Time, UT) bildet. Mit der Definition dieser Zeit, bei welcher der Sonnentag stets gleich lang ist, ist es nun vorteilhaft, in das geozentrische – oder allgemeiner: planetozentrische Bild – zu wechseln, so dass wir die Bewegung der Erde oder eines anderen Planeten um die Sonne durch eine scheinbare Bewegung der Sonne um den Planeten ersetzen (siehe »Der Planet im Zentrum«, S. 63).

Wegen der ungleichmäßigen Umlaufgeschwindigkeit der wahren Sonne (in Wirklichkeit des Planeten um die Sonne) kulminiert diese also mit einer gewissen Abweichung von der mittleren Sonne, die per Definition um 12:00 Uhr MOZ ihren täglichen Höchststand erreicht. Die zeitliche Variation des Sonnenhöchststands zwischen mittlerer und wahrer Sonne beziehungsweise das Vor- oder Nachgehen der wahren Sonne gegenüber der mittleren Sonne im Lauf eines Jahres wird Zeitgleichung (ZGL) genannt. Dieser Begriff ist ein wenig irreführend, da er keine mathematische Gleichung bezeichnet, sondern eine Zeitdifferenz als Funktion der Tage eines Jahres angibt:

$$ZGL = MOZ - WOZ$$



Michael Kaschke, Bertram Hönlinger; Bearbeitung: SuW-Grafik



NASA/JPL/Cornell/ASU/TAMU

Auf Erde und Mars
Links ist ein Analemma der Sonne dargestellt, aufgenommen im Jahr 2015 in Oberkochen. Die markierte Position fällt mit der partiellen Sonnenfinsternis vom 20. März 2015 zusammen. Gänzlich anders als auf der Erde präsentiert sich die Kurvenform auf der Oberfläche des Roten Planeten (rechts). Dem Marsrover Opportunity zeigte sich das Analemma birnenförmig. Diese auf den Zenit zentrierte Fischaugenprojektion aus dem Innern des Kraters Victoria ist eine Komposition von Bildern, die der Rover zwischen dem 16. Juli 2006 und dem 2. Juni 2008 aufnahm. Der Marshimmel wurde zusätzlich verdunkelt, um die Positionen der Sonne deutlicher darzustellen. Das helle Objekt in der Mitte ist die Sonne im Spätherbst 2007.

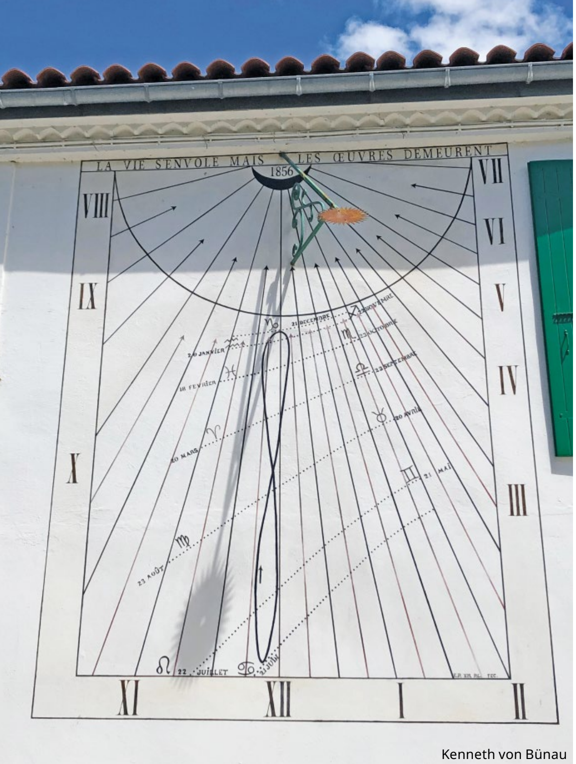
Gemäß dieser Definition ist ein Analemma nichts anderes als die astronomische Beobachtung der Zeitgleichung im Lauf eines planetaren Jahres, also eines Umlaufs des Planeten um die Sonne. Das Analemma gibt die auf der Planetenoberfläche beobachtete Abweichung der scheinbaren Bewegung der wahren Sonne (S_W) von der sich auf dem Himmelsäquator gleichmäßig bewegenden mittleren Sonne (S_M) an. Die Abweichung lässt sich in zwei astronomischen Koordinaten beobachten: in der Rektaszension (α) und in der Deklination (δ). Die Deklination der Sonne zu einer festen MOZ (und somit die Höhe der Sonne über dem Horizont) ändert sich auf Grund der Achsneigung des Planeten gegen seine Bahnebene – auch Schiefe genannt – im Lauf eines Jahres. Dies ist zumindest den Bewohnern der gemäßigten Breiten gut bekannt: Im Sommer erreicht die Sonne größere Höhen über dem Horizont als im Winter. Die Abweichung der Rektaszension α_W der wahren Sonne von der Rektaszension α_M der mittleren Sonne ist gerade die Zeitgleichung. Wir können also schreiben:

$$ZGL = \alpha_M - \alpha_W$$

Eine Methode zur Berechnung der Zeitgleichung für einen interessierenden Planeten haben wir in einem Infokasten beschrieben (siehe »Berechnung der Zeitgleichung auf anderen Planeten«, S. 62).

Analemmas auf anderen Planeten
Die genaue Form der Zeitgleichung beziehungsweise des Analemmas ergibt sich aus dem Zusammenspiel der Schiefe ε_P und der Bahnexzentrizität e_P des Planeten. Der durch ε_P verursachte Beitrag lässt sich verstehen, wenn man die Projektion der scheinbaren Sonnenbewegung aus der Bahnebene auf den Äquator betrachtet: Im Frühjahr und Herbst verursacht nämlich eine gleich große Winkeländerung der Sonne auf ihrer scheinbaren Bahn eine kleinere Änderung der Rektaszension als im Sommer und Winter, wenn die scheinbare Sonnenbewegung nahezu parallel zum Himmelsäquator erfolgt.

Der zweite Beitrag der Zeitverschiebung kommt durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten von mittlerer und wahrer Sonne zu Stande. Gemäß dem zweiten keplerschen Gesetz ist die Bahngeschwindigkeit mit der Ellipsenform der Planetenbahn verknüpft: Im sonnennächsten Punkt der Bahn, dem Perihel, bewegt sich der Planet schneller als im sonnenfernsten Punkt, dem Aphel. Dementsprechend hat



Kenneth von Bünau

die vom Planeten betrachtete wahre Sonne im Perihel gegenüber der mittleren Sonne eine größere Geschwindigkeit; im Aphel ist es umgekehrt.

Die aktuelle Position eines Planeten innerhalb seiner Bahn wird durch die wahre Anomalie υ beschrieben. Dies ist der von der Sonne betrachtete Winkel zwischen der Richtung zum Perihel und der Planetenposition (siehe »Beschreibung einer Planetenposition«). Die wahre Anomalie ist mit der exzentrischen Anomalie E verknüpft, einem Winkel, der als Hilfsgröße in praktische Berechnungen eingeht. Die exzentrische Anomalie verknüpft die Posit ion des Planeten auf der Ellipse mit einem Punkt auf dem Umkreis, der sich um die Ellipse zeichnen lässt. Der Winkel E lässt sich aus der Kepler-Gleichung berechnen:

$$M = E - e_P \sin(E)$$

Hierbei ist M die mittlere Anomalie: der Richtungswinkel für einen fiktiven Planeten, der sich nicht auf einer Ellipsenbahn mit der Exzentrizität e_P, sondern mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem Umkreis bewegt.

Die Kepler-Gleichung kann nicht explizit nach E aufgelöst werden, doch gibt es hierfür mathematische Verfahren (siehe Montenbruck und Pfleger, 1999). Für eine Lö-

Analemma auf einer alten Sonnenuhr

Auf diesem historischen Zeitmesser in dem französischen Ort Saint-Pierre-d'Oléron lässt sich die charakteristische Form des Analemmas erkennen.

Berechnung der Zeitgleichung auf anderen Planeten

Um die Zeitgleichung $ZGL = \alpha_W - \alpha_M$ berechnen zu können, müssen zunächst die Rektaszension α_W der wahren Sonne und die Rektaszension α_M der mittleren Sonne ermittelt werden.

Berechnung von α_W: Diese Größe kann in der Näherung einer Keplerbahn, also einer Ellipse, über die so genannte Mittelpunktsgleichung berechnet werden (Montenbruck und Pfleger, 1999). Die Mittelpunktsgleichung $C(t)$ gibt die Winkelabweichung der tatsächlichen Planetenbewegung von einer gleichmäßigen Kreisbewegung als Funktion der Zeit an. Sie stellt eine Näherungslösung der Kepler-Gleichung $M = E - e \sin(E)$ für kleine Bahnexzentrizitäten e dar. Da sich die Kepler-Gleichung nur näherungsweise lösen lässt, wird $C(t)$ durch eine Reihenentwicklung nach Sinusfunktionen der Zeit angegeben, in der als Parameter die Exzentrizität e und die mittlere Anomalie M des Planeten auftritt.

Hinsichtlich der Rektaszension der wahren Sonne α_W muss noch beachtet werden, dass diese sich erst aus einer Projektion der berechneten planetozentrischen Länge L_W auf den Äquator ergibt (siehe »Der Planet im Zentrum«, S. 63). Die Differenz zwischen dem aus $C(t)$ berechneten Wert L_W und der äquatorialen Rektaszension α_W lässt sich ebenfalls durch eine Reihenentwicklung bestimmen. Man bezeichnet diese Entwicklung als Reduktion auf den Äquator (Smart, 1986).

Berechnung von α_M: Der Wert dieser Größe folgt unmittelbar aus ihrer Definition (siehe »Der Planet im Zentrum«):

$$\alpha_M = L_W - C$$

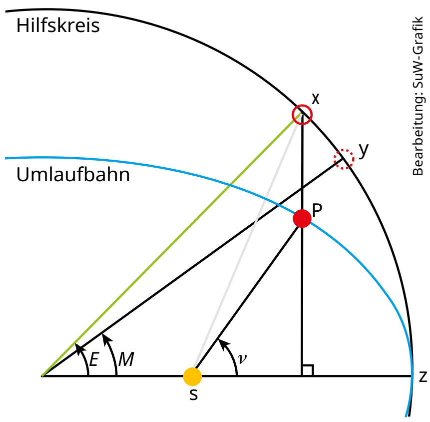
Die Zeitgleichung ergibt sich dann zu:

$$ZGL = \alpha_M - \alpha_W = -C + L_W - \alpha_W$$

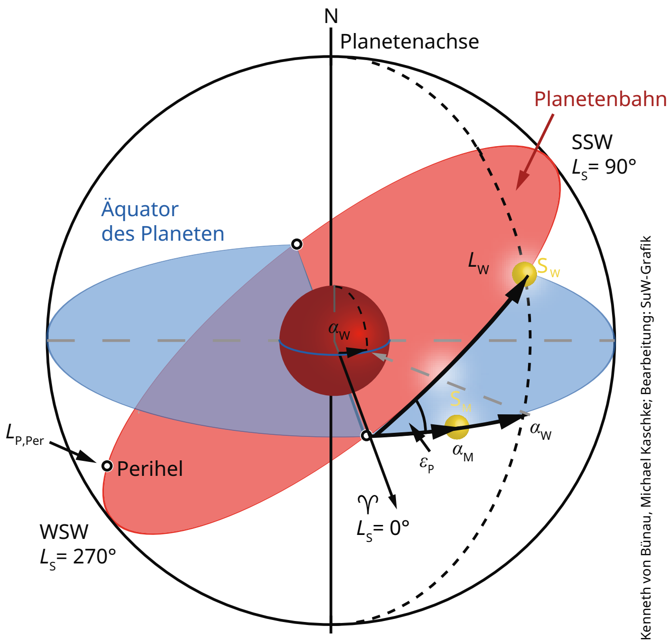
Diese Formel (siehe auch: Allison und McEwen, 2000) bietet eine einfache Methode zur Berechnung von ZGL, da sich die Größe L_W über die Mittelpunktsgleichung C relativ einfach ermitteln lässt. Es sei daran erinnert, dass für die Bestimmung von L_W aus der Mittelpunktsgleichung noch die planetozentrische Länge $L_{P,Per}$ der Sonne im Perihel benötigt wird. Die Größen in der Kepler-Gleichung und damit in der Mittelpunktsgleichung, werden vom Perihel aus gemessen, während die planetozentrische Länge den jeweiligen planetaren Frühlingspunkt als Nullpunkt hat.

Beschreibung einer Planetenposition

Der aktuelle Ort P eines Planeten auf seiner elliptischen Bahn wird durch die wahre Anomalie υ beschrieben. Sie ist der Winkel zwischen P und dem Perihel z, vom gravitierenden Zentralkörper S aus betrachtet. Eine Hilfsgröße, die Johannes Kepler zur Berechnung der wahren Anomalie einführte, ist die exzentrische Anomalie E. Sie ist der Winkel zwischen dem Perihel und dem Punkt x, vom Mittelpunkt der Ellipse aus betrachtet. Dieser Punkt liegt auf dem Umkreis der Ellipse (Hilfskreis mit der großen Halbachse als Radius) und auf der durch P gehenden Senkrechten zur großen Halbachse.
Eine weitere Berechnungsgröße ist die mittlere Anomalie M: der Richtungswinkel für einen fiktiven Himmelskörper auf dem Hilfskreis, auf dem er sich in der gleichen Umlaufzeit, aber mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt.



Bearbeitung: SuW-Grafik



Kenneth von Bünau, Michael Kaschke; Bearbeitung: SuW-Grafik

Der Planet im Zentrum

Die planetozentrische Länge L_W der wahren Sonne wird innerhalb der Ebene der Planetenbahn (rot) gemessen, welche um den Winkel ε_P gegen den Äquator des Planeten geneigt ist. Dieser Winkel wird auch als Schiefe bezeichnet. Die Position der mittleren Sonne S_M ist hingegen innerhalb der Äquatorebene des Planeten (blau) definiert und wird durch die Rektaszension α_M der mittleren Sonne angegeben. Der Position der wahren Sonne S_W entspricht innerhalb der Äquatorebene die Rektaszension α_W, die von α_M abweicht. Der Unterschied zwischen den beiden Rektaszensionen ist die Zeitgleichung: $ZGL = \alpha_M - \alpha_W$. In diesem planetozentrischen Bild bewegt sich die mittlere Sonne mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb der Äquatorebene um den Planeten. Sie trifft in den Tagundnachtgleichen (Äquinoktien) mit der sich entlang der Ekliptik bewegenden wahren Sonne zusammen, die sich entsprechend den keplerschen Gesetzen mit veränderlicher Geschwindigkeit bewegt und dieselbe Umlaufperiode hat.

Für eine Lösung E ergibt sich die wahre Anomalie υ des Planeten aus der folgenden Formel:

$$\tan\left[\frac{\upsilon}{2}\right] = \sqrt{\frac{1+e_P}{1-e_P}}\,\tan\left[\frac{E}{2}\right]$$

Mit den bisherigen Überlegungen liegt es nun nahe, die ZGL und das Analemma mittels einer Lösung der Kepler-Gleichung für die jeweilige planetare Bewegung – beziehungsweise für die vom Planeten aus beobachtete scheinbare Bewegung der Sonne – unter Verwendung der bekannten Bahnparameter des jeweiligen Planeten zu berechnen (siehe »Berechnung der Zeitgleichung auf anderen Planeten« und »Berechnung der Kurvenform eines Analemmas«, S. 64). Hierbei ist es wichtig, die relative Lage des Perihels der Bahn bezüglich des Frühlingspunkts $♈_P$ des jeweiligen Himmelskörpers zu kennen, genauer: die planetozentrische Länge des Perihels, bezogen auf den planetaren Frühlingspunkt $♈_P$. Hierunter versteht man den aufsteigenden Knoten der jeweiligen Planetenbahn, also den Schnittpunkt der Bahn mit der Äquatorebene, wo die Bahn den Äquator von Süd nach Nord durchstößt.

Der aufsteigende Knoten lässt sich als Vektorprodukt aus der Bahnnormalen der Planetenbahn und dem Richtungsvektor der Rotationsachse des Planeten berechnen. Dazu transformiert man zunächst die Lage der Rotationsachse des Planeten in planetozentrische ekliptikale Koordinaten. Die Lage der Rotationsachse in geozentrischen Koordinaten liegt in der Literatur tabellarisch vor (Archinal, 2010).

Mit Hilfe des in der Bahnebene gemessenen Winkelabstands ω_P des Perihels zum aufsteigenden Knoten kann dann die planetozentrische Länge der Sonne im Perihel $L_{P,Per}$ berechnet werden. Da man diese Größe in der Literatur nicht einheitlich tabelliert vorfindet, haben wir die von uns ermittelten Werte zusammengefasst (siehe Tabelle »Planetozentrische Länge«).

Mit dem Wert für $L_{P,Per}$ können wir nun die Zeitgleichung und auch das Analemma nach der in den Infokästen beschriebenen Methodik berechnen. Hierfür benötigt man die planetaren Bahnparameter e_P, ε_P, $L_{P,Per}$ sowie die mittlere Anomalie M_P oder alternativ die mittlere Bewegung n_P des Planeten, die beide die durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeiten auf der Planetenbahn in Grad pro Sekunde oder Radiant pro Sekunde angeben und tabelliert sind (Montenbruck und Pfleger, 1999). Die Berechnungen von Zeitgleichung und Analemma liefern die für den Mars gezeigten Bilder: die vom Rover Opportunity von der Oberfläche des Roten Planeten beobachtete Birnen- oder Tränenform des Analemmas (siehe »Zeitgleichung und Analemma auf dem Mars«, S. 65).

Planetozentrische Länge

Planet	$L_{P,Per}$ in Grad
Merkur	325,7
Venus	253,8
Erde	282,9
Mars	251,0
Jupiter	57,1
Saturn	279,5
Uranus	185,5
Neptun	2,6
Pluto	184,5

Angegeben ist die planetozentrische Länge des Perihels ($L_{P,Per}$), bezogen auf den planetaren Frühlingspunkt, für die Planeten und Pluto.

Wir haben bereits gesehen, dass die Zeitgleichung als Konsequenz unterschiedlicher Zeitdefinitionen aufgefasst werden kann: Sie ist die Differenz der durch den Lauf der Sonne definierten wahren Sonnenzeit und der durch die mittlere Sonne festgelegten mittleren Sonnenzeit. Mit der Zeitgleichung für den Mars lassen sich nun auch die entsprechenden Zeiten für den Roten Planeten konstruieren und sowohl ineinander umrechnen als auch auf die Weltzeit (UT) beziehen. Dies ist unter anderem in der Raumfahrt von Bedeutung: Die meisten Marslander nutzen eine planetare mittlere Ortszeit, der Lander Pathfinder hingegen nutzt eine planetare wahre Ortszeit. Um in einer mittleren planetaren Ortszeit (oder der selten verwendeten globalen mittleren Sonnenzeit UT) beispielsweise den Sonnenhöchststand zu ermitteln, muss die Zeitgleichung auf dem Planeten genau bekannt sein. Diese weist auf dem Mars immerhin im Lauf eines Marsjahres eine Differenz von bis zu 50 Minuten auf.

Die Zeitgleichungen und Analemmas haben wir nicht nur für den Mars, sondern auch für die anderen großen Planeten sowie den Zwergplaneten Pluto berechnet

Berechnung der Kurvenform eines Analemmas

Für die Kurvenform eines Analemmas – also die grafische Auftragung der Zeitgleichung *ZGL* gegen die Deklination δ der Sonne – lässt sich auch direkt eine geschlossene Formel angeben. Man startet dazu mit der wahren Anomalie υ und betrachtet ein ganzes planetarisches Jahr. Innerhalb eines Jahres durchläuft υ alle Winkel von 0 bis 360 Grad. Die planetozentrischen Längen der wahren und mittleren Sonne sind gegeben durch:

$L_W = \upsilon + L_{P,Per}$ beziehungsweise $L_M = M_P + L_{P,Per}$

Dazu muss die planetozentrische Länge $L_{P,Per}$ des Perihels der Planetenbahn bekannt sein. Die Rektaszensionen ergeben sich aus den bekannten Umrechnungsformeln von dem planeto-ekliptikalen System in das planeto-äquatoriale Koordinatensystem (Montenbruck und Pfleger, 1999), woraus die Formel für die Form eines Analemmas resultiert:

$$ZGL\,(\upsilon) = M_P + L_{P,Per} - \arctan\,[\cos \varepsilon_P \tan\,(\upsilon + L_{P,Per})]$$
$$\delta\,(\upsilon) = \arcsin\,[\sin \varepsilon_P \sin\,(\upsilon + L_{P,Per})]$$

Setzt man in diese Formeln jeweils die wahre Anomalie von 0 bis 360 Grad ein, so erhält man die Kurve des Analemmas, nicht aber dessen zeitliche Abhängigkeit oder die ZGL. Mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung $C(t)$ kann die in den Formeln auftretende wahre Anomalie υ aber auch als Funktion der Zeit berechnet werden. Damit ergibt sich auch wieder die Zeitgleichung beziehungsweise das Analemma als Funktion der Zeit. Als Alternative kann man die Zeitabhängigkeit von υ auch durch die Berechnung der exzentrischen Anomalie E aus der Kepler-Gleichung mit Hilfe der folgenden Formel gewinnen:

$$\tan\left[\frac{\upsilon}{2}\right] = \sqrt{\frac{1+e_P}{1-e_P}}\,\tan\left[\frac{E}{2}\right]$$

(siehe »Analemmas der Planeten«, S. 65). Uranus stellt hierbei einen besonderen Fall dar, denn seine Rotationsachse ist um einen sehr großen Winkel von rund 98 Grad gegen die Bahnebene geneigt. Somit ist hier nicht der Spezialfall kleiner Winkel anwendbar, wie dies bei den übrigen Planeten der Fall ist. Während die meisten im Internet kursierenden Bilder von Analemmas anderer Planeten untereinander konsistent sind, findet man für das Uranus-Analemma verschiedene Bilder – es ist also sicherzustellen, dass die Abweichung der Äquatorialebene des Planeten von der Ekliptikebene korrekt berücksichtigt wird.

Das Sonnenanalemma auf dem Mond

Interessante Effekte ergeben sich, wenn man beliebige Himmelskörper betrachtet, deren Bahnen keine Ellipsenform besitzen: Die Bewegung des Erdmondes ergibt sich aus der Überlagerung seiner Bewegung um die Erde und der Erdbewegung um die Sonne. Unter Benutzung einer Näherungslösung für die komplexe Mondbahn (Meeus, 1998; Montenbruck und Pfleger, 1999) und einer Keplerlösung für die Erdbahn können wir die Sonnenposition in selenozentrischen, also auf den Mond bezogenen Koordinaten bestimmen. Damit lässt sich völlig analog zu den Planeten das Analemma der Sonne bestimmen, welches ein Astronaut auf dem Mond beobachten würde.

Als Winkel übernehmen wir näherungsweise den Wert der Erde, da die Mondbahn um die Sonne grob mit der Erdbahn übereinstimmt. Die Grundform des Analemmas ergibt sich dann wie bei den Planeten aus der Achsneigung des Mondes und der Exzentrizität der Erdbahn. Da die Mondachse nur sehr geringfügig gegen die Ekliptik geneigt ist, liefert die Berechnung analog zu Planeten wie Jupiter eine Ellipse (siehe »Zeitgleichung und Analemma auf dem Mond«, S. 67).

Die Form des Analemmas unterscheidet sich jedoch auf Grund der Bewegung des Mondes um die Erde deutlich von den glatten Kurven der Planeten-Analemmas (siehe »Zeitgleichung und Analemma auf dem Mond«, S. 67). Durch den Einfluss der Präzession der Mondbahn beziehungsweise des Knotens ist das Analemma nicht mehr geschlossen. Unsere Berechnungen liefern das Analemma als Funktion der Weltzeit (UT). Für einen Astronauten auf der Mondoberfläche ist wegen der gebundenen Rotation des Trabanten nur einmal pro synodischem Monat Mittag. Beobachtet er die Sonne nur einmal pro Mondzyklus, während ihrer Höchststellung am Mittag, ergibt sich wie bei den Planeten ein glattes Analemma mit der durch die Exzentrizität beeinflussten ovalen Form.

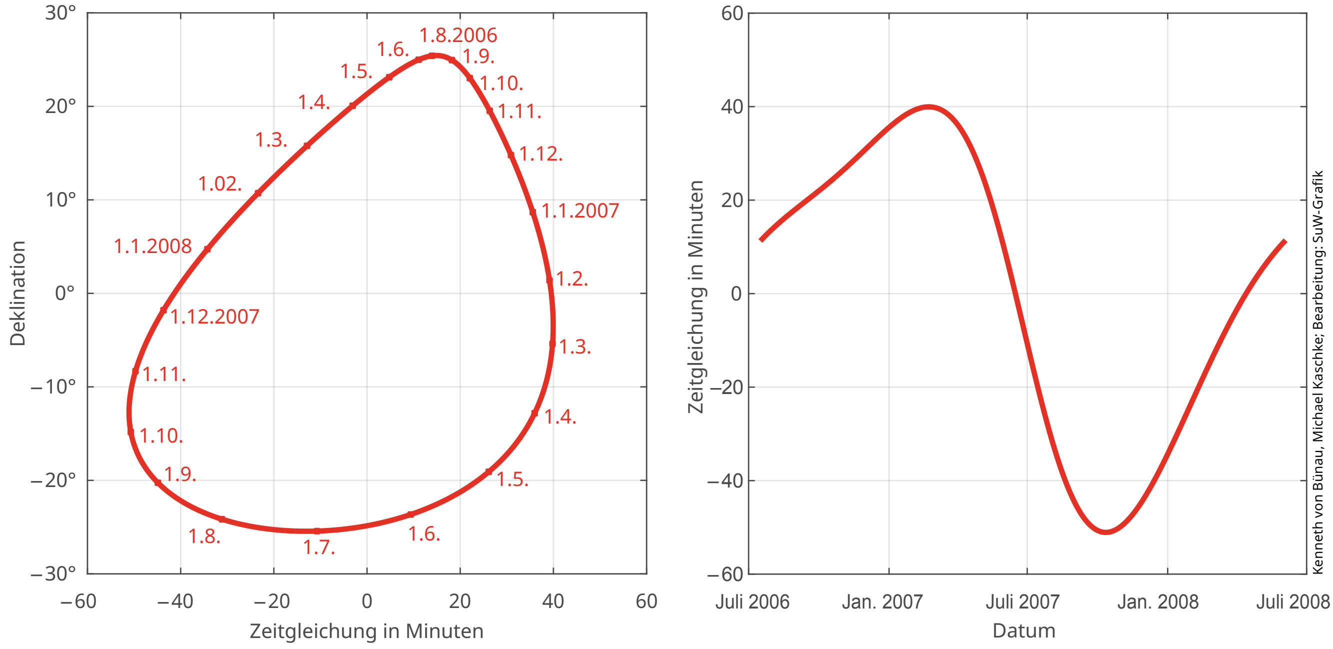
Berechnung der Zeitgleichung des Mondes

Bisher ging es nur um Analemmas der Sonne. Zum Schluss wollen wir uns noch dem Analemma zuwenden, welches der Mond am irdischen Himmel beschreibt. Unsere Vorfahren hätten theoretisch – vom Biorhythmus einmal abgesehen – auch den Erdtrabanten als Grundlage der Zeitmessung wählen können. Definiert man analog zur mittleren Sonne einen mittleren Mond, was wegen der komplizierten Mondbahn etwas schwieriger ist, ergeben sich ebenfalls Abweichungen des wahren Mondes von diesem mittleren Mond und somit ein Analemma.

Die Bahnebene des Mondes ist nur um rund fünf Grad gegen die Ekliptik geneigt. Somit ist die bei der Berechnung zu berücksichtigende Achsschiefe – nämlich diejenige der Erde – von der gleichen Größenordnung wie im Fall des Analemmas der Sonne. Allerdings ist die Exzentrizität der Mondbahn größer als diejenige der Erdbahn. Darüber hinaus führen die Drehung der Mondbahn im Raum und das damit verbundene Fortschreiten der Knoten zu einer signifikanten Änderung der Form des Analemmas innerhalb einer Präzessionsperiode von etwa 18,6 Jahren. Auch das Analemma von zwei aufeinanderfolgenden Monaten ist häufig nicht geschlossen.

Unsere Ergebnisse haben wir mit Bildern verglichen, die der ungarische Fotograf und Astronom Gyorgy Soponayi in den Jahren 2014 und 2020 aufgenommen hat. Die sich daraus ergebenden Kurvenformen werden durch unsere Berechnungen gut reproduziert, wenn man den Mond am Himmel in einem genauen zeitlichen Abstand von 24 Stunden 50 Minuten und 28,3 Sekunden fotografiert. Dieser zeitliche Abstand ergibt sich aus dem Zusammenspiel von Erdrotation und mittlerer Mondbewegung: Der Mond bewegt sich in der gleichen Richtung um die Erde, in der sich die Erde selbst dreht. Daher lässt sich der zeitliche Abstand zwischen zwei Kul-

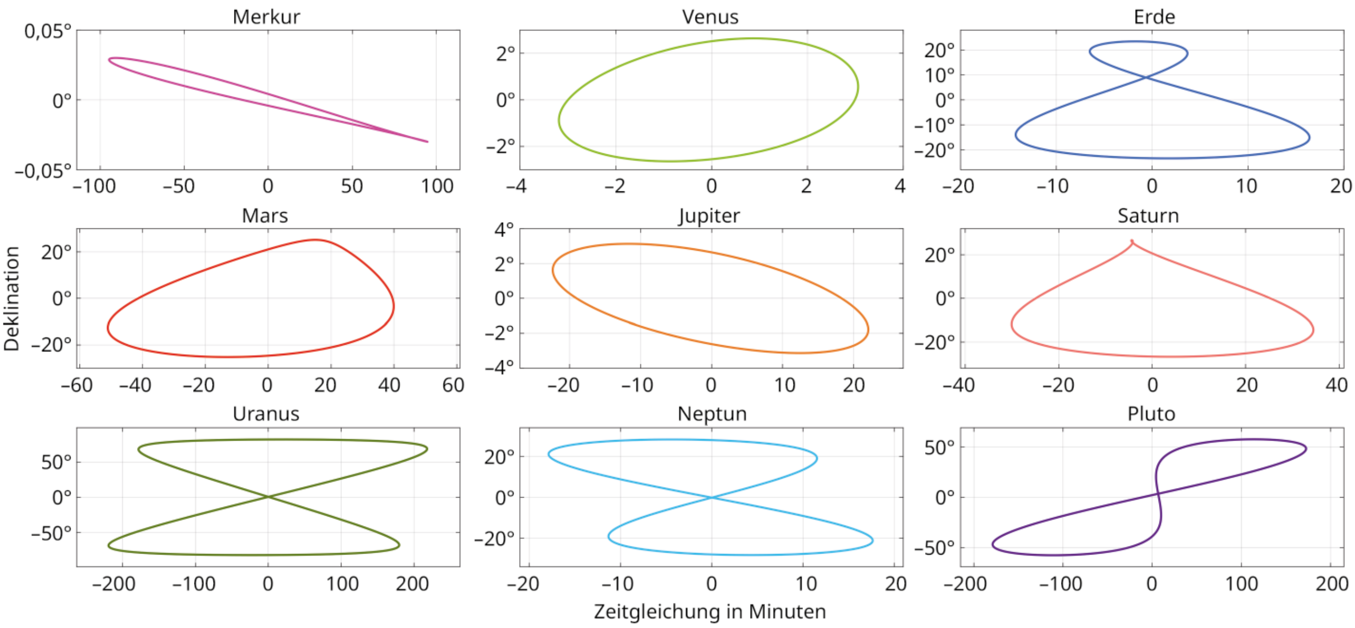
Zeitgleichung und Analemma auf dem Mars



Die Kurvenform des Analemmas (links), die sich auf den Zeitraum von Juli 2006 bis Juni 2008 bezieht, lässt sich anhand der Zeitgleichung (rechts) erklären: Wenn der Rote Planet am weitesten von der Sonne entfernt ist – was im Zeitraum Sommer 2006 bis Frühjahr 2007 der Fall war –, bewegt sich die Sonne relativ langsam über den Marshimmel und bildet die Spitze der geschlossenen Kurve. Befindet sich der Planet im sonnennahen Abschnitt seiner Bahn, wie im Sommer 2007, dann bewegt er sich schneller. Die scheinbare Sonnenbewegung in einem vergleichbaren Zeitabschnitt erstreckt sich dann über einen großen Winkelbereich, sichtbar am abgerundeten unteren Bogen des Analemmas.

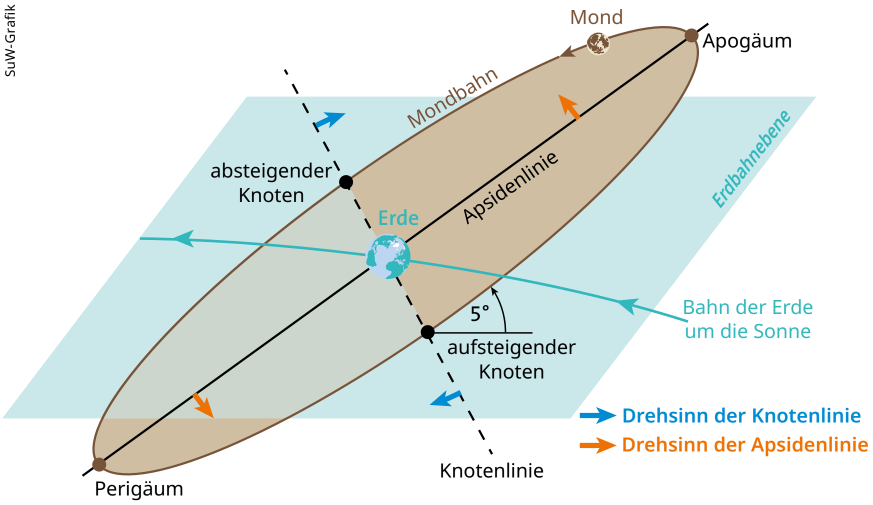
Analemmas der Planeten

Kenneth von Bünau, Michael Kaschke; Bearbeitung: SuW-Grafik

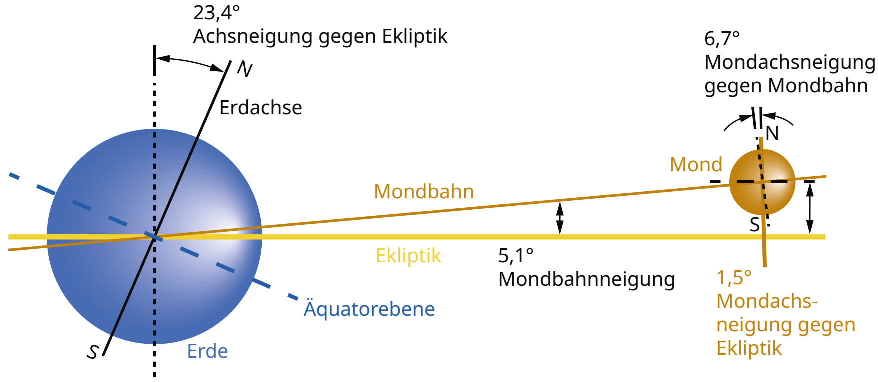


Das Analemma der Sonne, das sich von der Oberfläche eines Planeten beobachten lässt, wird durch die Neigung der Rotationsachse des Planeten und durch die Exzentrizität seiner Bahn beeinflusst. Die Grafiken lassen gut erkennen, dass jeweils die Form einer Acht entsteht, wenn der Einfluss der Achsneigung den Einfluss der Exzentrizität überwiegt (Erde, Uranus, Neptun) und dass sie verschwindet, wenn der Einfluss der Exzentrizität dominiert (Merkur, Venus, Jupiter). Einen Zwischenfall bilden die Analemmas für Mars, Saturn und den Zwergplaneten Pluto, deren Parameter je nach Ausrichtung von Rotationsachse und Perihel sowohl eine Acht als auch tropfenförmige Analemmas erlauben.

SuW-Grafik

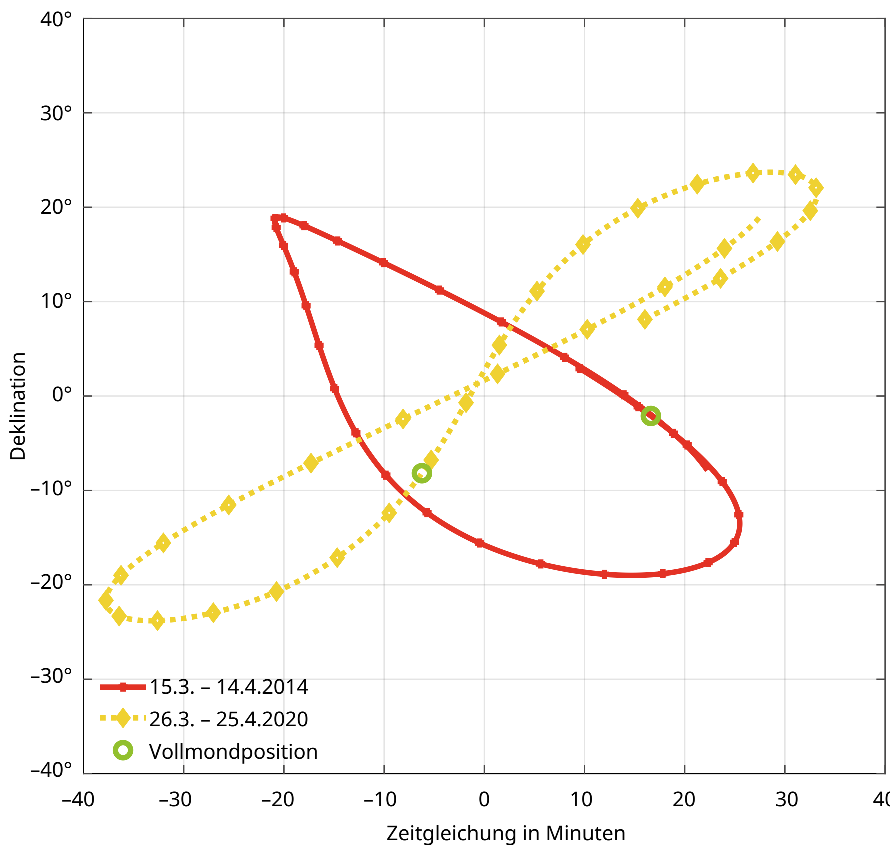


Michael Kaschke und Kenneth von Bünau, nach: CielProfond (commons.wikimedia.org/wiki/File:Lunar_Orbit_and_Orientation_with_respect_to_the_Ecliptic.svg) / public domain; Bearbeitung: SuW-Grafik



Die Erde und ihr Begleiter

Die Mondbahn ist um rund fünf Grad gegen die Erdbahnebene geneigt, die Rotationsachse des Mondes hingegen nur um 1,5 Grad. Allerdings ist die Bahn des Erdtrabanten keine reine Kepler-Ellipse, zudem ändert sich im Lauf der Zeit ihre Orientierung im Raum: Die Verbindungslinie zwischen auf- und absteigendem Knoten dreht sich mit einer Periode von 18,6 Jahren (Pfeile).



Kenneth von Bünau, Michael Kaschke; Bearbeitung: SuW-Grafik

Analemma des Mondes

Die Figur, die das Analemma des Erdtrabanten am irdischen Himmel beschreibt, verändert sich mit der Zeit. Die dargestellten Kurven beziehen sich auf zwei verschiedene Zeiträume und erfassen jeweils einen synodischen Monat.

minationen des mittleren Mondes durch die Differenz der Winkelgeschwindigkeiten beziehungsweise durch die Differenz der Kehrwerte der siderischen Umlaufzeiten von Erde und Mond beschreiben:

$$\omega_{\text{eff,Mond}} = \omega_{\text{sid,Erde}} + \omega_{\text{sid,Mond}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sid,Erde}}} - \frac{2\pi}{T_{\text{sid,Mond}}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{T_{\text{kulm,Mond}}} = \frac{1}{T_{\text{sid,Erde}}} - \frac{1}{T_{\text{sid,Mond}}} = \frac{1}{86164\,\text{s}} - \frac{1}{27{,}321662 \cdot 86400\,\text{s}}$$

Dieser Zeitabstand muss bei der fotografischen Erstellung eines Analemmas des Mondes sekundengenau eingehalten werden, weil es sonst im Lauf eines Monats zu entsprechenden Azimutverschiebungen kommt, die auf Grund der relativ schnellen Bewegung des Mondes am Fixsternhimmel das aufgenommene Analemma verfälschen würden.

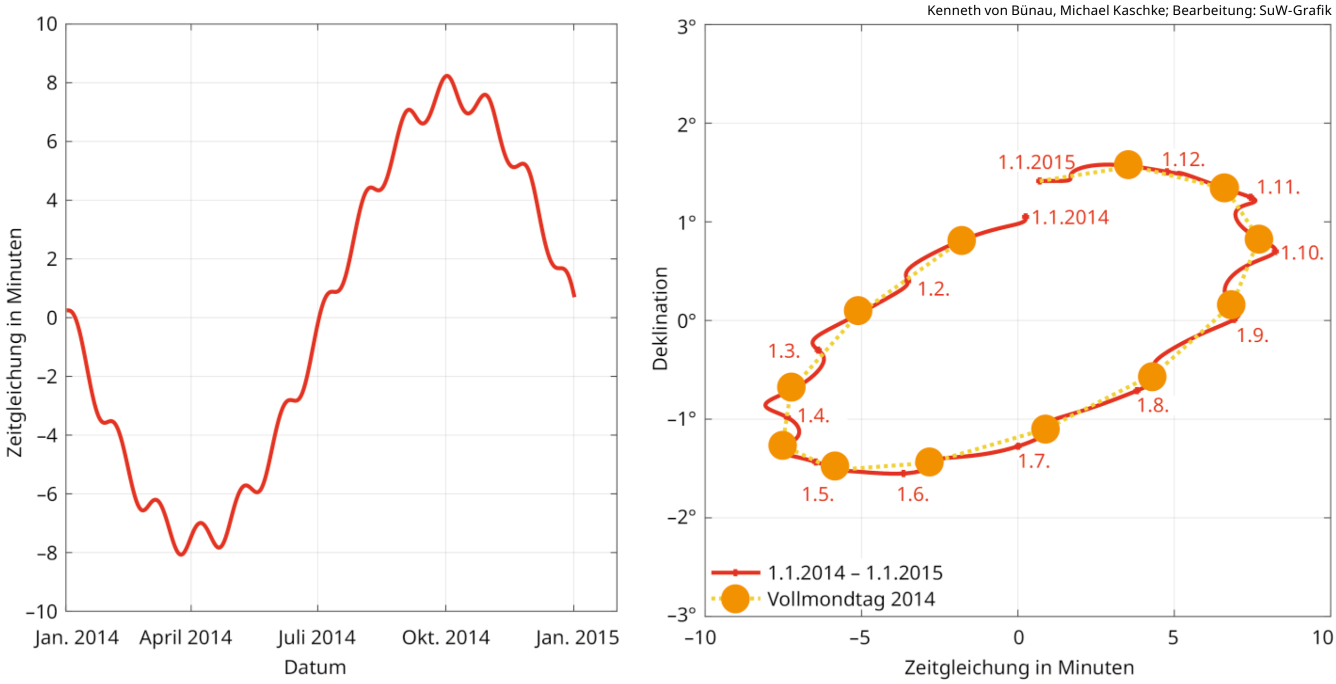
Der Himmel über anderen Welten

Wir haben eine Methode vorgestellt, mit der sich auf verschiedenen Himmelskörpern mit Hilfe einiger bekannter oder messbarer Bahnparameter und der tabellierten relativen Positionen ihrer

Zeitgleichung und Analemma auf dem Mond

Die Exzentrizität der Mondbahn und die Neigung der Mondachse gegen die Erdbahnebene beeinflussen die Form des Analemmas, das ein Astronaut auf dem Mond beobachten würde. Da die Achsneigung nur 1,5 Grad beträgt, ist ihr Einfluss gering; vielmehr wird der Verlauf der Zeitgleichung (links) und die Form des Analemmas (rechts) von der Exzentrizität dominiert. Wegen der im Detail recht komplizierten Form der Mondbahn ergeben sich keine glatten Verläufe.

Kenneth von Bünau, Michael Kaschke; Bearbeitung: SuW-Grafik



Rotationsachse und Bahnebene die Zeitgleichung sowie das Analemma der Sonne für den jeweiligen Himmelskörper ermitteln lassen. Am Beispiel des Mondes konnten wir zudem zeigen, welche Abweichungen sich am Analemma ergeben, wenn komplizierte Bahnen vorliegen, die sich nicht mehr als einfache Lösung des Zweikörper-Kepler-Problems darstellen lassen.

Hinsichtlich der Frage, ob sich ein Analemma von anderen Planeten tatsächlich beobachten lässt, können wir allerdings nur Vermutungen anstellen. In jedem diskutierten Fall bleibt die Sonne der dominante Himmelskörper, wenn auch die Himmelsbeobachtung durch die jeweilige Atmosphäre stark negativ beeinflusst sein dürfte. Beispielsweise wurden bislang keine Bilder aus der Jupiteratmosphäre in Richtung zur Sonne aufgenommen. Man geht allerdings davon aus, dass auch hier der Himmel bläulich erscheint. Die Sonne ist aber dort im Durchschnitt mehr als 25-mal schwächer als auf der Erde und hat einen Winkeldurchmesser von nur fünf Bogenminuten. Zudem erfordert die Beobachtung eines Analemmas auf den Planeten jenseits der Marsbahn einige Geduld. Wir können aber zumindest vorhersagen, was zukünftige Rover-Missionen bei einem wiederholten Blick an den Planetenhimmel erwartet. Das könnte dann getestet werden.

Auf der Website **kaschke-medtec.de/analemma.html** bieten wir Zusatzmaterial an, unter anderem MATLAB®-Dateien zum Berechnen der Analemmas sowie eine Berechnung der scheinbaren Helligkeiten und des Winkeldurchmessers der Sonne für die einzelnen Planeten. ■

Kenneth von Bünau studiert Physik an der Universität Heidelberg und interessiert sich seit seiner Schulzeit für den Weltraum.

Michael Kaschke studierte und promovierte an der Universität Jena im Fach Physik. Nach Forschungsarbeiten in der Ultrakurzzeitphysik, unter anderem am Max-Planck-Institut für biophysikalische Chemie und bei IBM, war er viele Jahre in der optischen Industrie leitend tätig. Heute ist er unter anderem als Honorarprofessor am KIT für Medizintechnik und Innovation tätig. Sein Interesse an der Astronomie und Astrophysik hat er sich stets bewahrt.

Literaturhinweise

Allison, M., McEwen, M.: A post-pathfinder evaluation of areocentric solar coordinates with improved timing recipes for Mars seasonal/diurnal climate studies. Planetary and Space Sciences 48, 2000

Archinal, B. A. et al.: Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 109, 2010

Hebbeker, T.: Die Sonne in der Achterbahn: Wie das Analemma entsteht. Sterne und Weltraum 3/2013, S. 80–87

Hofmann, E.: Ein Zeitmesser für alle Fälle. Sterne und Weltraum 8/2011, S. 84–89

Meeus, J.: Astronomical Algorithms. Willmann-Bell, Richmond 1998

Meyer, J.: Die Sonnenuhr und ihre Theorie. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 2008

Montenbruck, O., Pfleger, T.: Astronomie mit dem Personal Computer. Springer Verlag, Berlin 1999

Niel, K.: Die Grieskirchner Sonnenuhr. Sterne und Weltraum 5/2015, S. 66–72

Smart, W. M.: Textbook on Spherical Astronomy. Cambridge University Press, Cambridge 1998

Dieser Artikel und Weblinks: **www.sterne-und-weltraum.de/artikel/2019688**